ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ШАЗИ С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Швычкина Е. Н.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Уравнения третьего порядка с шестью различными полюсами относительно искомой функции рассматривал Шази [4]. Результаты его исследований сводятся к следующему.

1) Если решения таких уравнений не имеют подвижных критических особых точек, то последние по необходимости должны иметь вид

$$w'''=\sum_{k=1}^{6}\frac{(w'-a_k')(w''-a_k'')+A_k(w'-a_k')^3+B_k(w'-a_k')^2}{w-a_k}+$$
$$+\frac{C_k(w'-a_k')}{}+Dw''+E\,w'+\prod_{i=1}^{6}(w-a_i)\sum_{k=1}^{6}\frac{F_k}{w-a_k}, \qquad (1)$$

которые, очевидно, содержит 32 функции по $z: A_k, B_k, C_k, F_k \quad (k=\overline{1,6}),$ и D, E.

2) Если, кроме того, эти функции удовлетворяют специальной системе (S), состоящей из 31 алгебраического и дифференциального уравнения, то эти условия будут и достаточными. Система (S) содержит 31 уравнение с 32 функциями.

Однако Шази не завершил интегрирование системы (S) и не определил класс неприводимых уравнений, которому принадлежало бы уравнение (1). Вместе с тем он показал, что некоторые случаи вырождения уравнения (1) являются неприводимыми уравнениями Пенлеве. С этой точки зрения, уравнение (1) можно рассматривать как новое, трансцендентные решения которого не имеют подвижных критических особых точек [1].

При исследовании характера особых точек во многих случаях удобнее рассматривать вместо уравнения (1) эквивалентную ему систему.

В данной работе, для случая, когда коэффициенты уравнения (1) являются постоянными и $B_k=0 \quad (k=\overline{1,6})$, составлена система вида

$$\begin{cases} w''=-f_1(z,w)w'^2+f_2(z,w)v+f_3(z,w), \\ v'=-2f_1(z,w)w'v+f_4(z,w); \end{cases} \qquad (2)$$

где $f_i \quad (i=\overline{1,4})$ функции по z и w подлежащие определению. Продифференцируем первое уравнение системы (2) по z и, подставляя (2) в уравнение Шази (1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях w, получим систему дифференциальных уравнений для отыскания функции $f_i \quad (i=\overline{1,4})$. Эта система имеет следующий вид

$$f_2\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w-a_k}-\frac{\partial f_2}{\partial w}=0, \qquad f_2-\frac{\partial f_2}{\partial z}=0, \qquad f_1-\frac{\partial f_1}{\partial z}=0,$$
$$-2f_1^2+f_1\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w-a_k}+\sum_{k=1}^{6}\frac{A_k}{w-a_k}-\frac{\partial f_1}{\partial w}=0, \qquad (3)$$

$$E - 2 f_3 f_1 \ + f_3 \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{w - a_k} + \sum_{k=1}^{6} \frac{C_k}{w - a_k} + \frac{\partial f_3}{\partial w} = 0,$$

$$f_4 f_2 \ + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0.$$

Из первых двух уравнений системы (3) находим функцию

$$f_2 \ (z, w) = z \cdot \prod_{k=1}^{6} (w - a_k) \cdot C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Чтобы решить систему (3) применим метод, который рассматривается в работе [3] для решения линейного уравнения второго порядка класса Фукса с шестью особыми точками. Рассмотрим подробнее процедуру нахождения функции $f_1(z, w)$. Из третьего уравнения системы (3) найдем

$$f_1(z, w) = z \cdot T(w) .$$

Т. о. четвертое уравнение системы (3) является уравнением Риккати относительно неизвестной функции $T(w)$. Решение будем искать в виде

$$T(w) = \frac{b_0 w^5 + b_1 w^4 + b_2 w^3 + b_3 w^2 + b_4 w + b_5}{w^6 - w^5 \sigma_1 + w^4 \sigma_2 - w^3 \sigma_3 + w^2 \sigma_4 - w \sigma_5 + \sigma_6}, \tag{4}$$

где $\sigma_i \ \ (i = \overline{1,6})$ – элементарные симметрические многочлены, составленные из элементов $a_i \ (i = \overline{1,6})$. Преобразуем следующее выражение к виду

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{A_k}{w - a_k} = \frac{6w^4 - 3w^2 \alpha + 3w \beta_2 - 3\beta_3 - 4w^3 \sigma_1 \ + 3w^2 \sigma_2 + \sigma_4}{w^6 - w^5 \sigma_1 + w^4 \sigma_2 - w^3 \sigma_3 + w^2 \sigma_4 - w \sigma_5 + \sigma_6}, \tag{5}$$

где $\sigma_i \ \ (i = \overline{1,6})$ связаны с величинами α, β_2, β_3 следующими соотношениями,

$$\beta_2 = \frac{(3\alpha_2 - \sigma_2)(2\alpha_2 \sigma_1 - 3\sigma_3) - 2\sigma_1 \sigma_4 + 6\sigma_5}{18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2},$$

$$\beta_3 = \frac{2\sigma_1 \sigma_5 - (3\alpha_2 - \sigma_2)(12\alpha_2^2 - 4\alpha_2 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 - 4\sigma_4) - 2\sigma_1 \sigma_4 + 6\sigma_5}{2(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)},$$

а число α удовлетворяет уравнению 5-й степени [3]. Выражение (5) получено также с учетом выполнения соотношений между функциями A_i и a_i системы (S).

Подставляя (4) в четвертое уравнение системы (3), получим уравнение десятой степени относительно w. Приравнивая коэффициенты этого уравнения нулю, получим систему из одиннадцати алгебраических уравнений, где неизвестными являются коэффициенты $b_k \quad (k=\overline{0,5})$ и $\sigma_i \quad (i=\overline{1,6})$. Частное решение четвертого уравнения системы (3) в случае $b_0 = 2$ есть $T(w)=\dfrac{2}{w}$ Т.о.

$$f_1(z,w)=z\cdot\frac{2w^2(2C_2w-3)}{2w^3(C_2w-2)+\sigma_3}$$

Построение систем (2) и (3), нахождение их решений требует громоздких вычислений, которые были реализованы в системе *Mathematica* [2]. В данной работе не приводится явный вид всех функций $f_i \quad (i=\overline{1,4})$ по причине их большого объема.

Литература

1. Добровольский, В.А. очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений / В.А. Добровольский – Киев: Вища школа, 1974. – 456 с.
2. Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса: Монография / А.В. Чурин – М.: Изд-во РУДН, 2003. – 143 с.
3. Chazy J. – Sur les equations differentielles du troisieme order et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes. Acta Math., 1911 – N 34. – P. 317 – 385.

УДК 517.983+519.6

О СХОДИМОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Юрко И.В.
УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест
Научный руководитель – Савчук В.Ф., кандидат физ.-мат. наук, доцент

Поскольку некорректные задачи возникают в многочисленных приложениях математики, то проблема их решения и разработка методов их решения является актуальной. В работе предлагается новый метод решения некорректных задач. Цель исследования – доказать сходимость предложенного метода в случае априорного выбора числа итераций, получить оценки погрешности и их минимизировать. Методологической основой исследования является общая теория некорректных задач, элементы функционального и математического анализа, вычислительной математики.

В гильбертовом пространстве H решается уравнение 1-го рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A - ограниченный положительный и самосопряженный оператор, в предположении, что нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением. Тогда задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) существует, то будем искать его с помощью итерационного метода

$$x_{n+1}=(E-\alpha A)^2x_n+2\alpha y-\alpha^2Ay,\ x_0=0. \tag{2}$$